Hypothèse théorique concernant l'induction d'un champ gravitationnel de type vectoriel généré par le déplacement accéléré des masses en mouvement

Mathieu Beau*

School of Theoretical Physics, Dublin Institute for Advanced Studies, 10 Burlington Road, Dublin 4†

(Dated: September 5, 2012)

Abstract

Nous proposons une théorie (G) du champ vectorielle $G_\mu(x)$ en s'appyant sur une construction analogue à la théorie électromagnétique (EM) et sur un principe d'induction de type gravitationnelle générée par des courants de masses accélérées. Il s'agit de présenter une première réflexion sur ce travail en construisant d'abord le Lagrangien $L = -mc^2 G_\mu(x)\ddot{x}^\mu$ (m est la masse et $\ddot{x}^\mu$ l'accélération de la particule, G_μ le champ vectoriel), en discutant ensuite le principe d'induction puis en proposant les équations de champs. Nous regarderons ensuite les équations du mouvement à l'ordre des petites vitesses (ordre v/c) et établirons les équations qui décrivent un nouveau phénomène de type gravitomagnétique (GEM-G) prédit par la théorie (G) et analogues aux équations gravitomagnétiques (GEM) qui dérivent de la théorie de la relativité génerale (RG). Enfin, nous proposerons une première reflexion sur l'intégration de la théorie (G) au cadre général de la relativité et donc à la théorie Einsteinienne de la gravité (RG) et nous discutetons les implications conceptuelles d'une théorie (RG) complétée par l'ajout du champ G_μ.

CONTENTS

I. CONSTRUCTION FORMELLE DU LAGRANGIEN ET IDÉE GÉNÉRALE

L'idée à l'origine de ce travail est une question formelle : peut-on construire une théorie de champ vectorielle, analogue à la théorie électromagnétique, où le potentiel vecteur noté $G_\mu(x)$ couple avec l'accélération $\ddot{x}^\mu$ des particules massives; rappelons que le potentiel électromagnétique $A_\mu(x)$ couple avec la vitesse $\dot{x}^\mu$ des charges, considérons ici le problème relativiste dans un espace de Minkowski où la métrique est notée $\eta_{\mu\nu}$ avec la signature $(+1, -1, -1, -1)$. On rappelle les définitions du quadrivecteur vitesse $u^\mu \equiv \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ et du quadrivecteur accélération $\ddot{x}^\mu \equiv \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}$. Nous serons amenés à utiliser d'autres notations correpondantes aux définitions de la vitesse $v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = c\gamma^{-1}u^\mu$ et de l'accélération $a^\mu = c\frac{du^\mu}{dt} = c^2\gamma^{-1}\ddot{x}^\mu$, où le facteur de dilatation temporelle γ est donné par: $\gamma = c\frac{dt}{ds} = (\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}})^{-1}$; remarquons que ces deux "vecteurs" ne sont pas des quadrivecteurs.

Ainsi, par analogie avec le couplage entre le potentiel électromagnétique $A_\mu(x)$ et la vitesse $\dot{x}^\mu$ d'une particule de charge q (c.f.[1]) :

$$L_{EM} = -qA_\mu(x)\dot{x}^\mu \ , \tag{1}$$

nous construisons le Lagrangien suivant:

$$\boxed{L_G = -mc^2 G_\mu(x)\ddot{x}^\mu} \ , \tag{2}$$

qui est invariant de Lorentz. Il s'agit d'un champ vectoriel $G_\mu(x)$ qui couple avec le quadrivecteur accélération $\ddot{x}^\mu$ associé à la particule en mouvement avec une constante de couplage mc^2 où m est la masse de la particule. Notons que la dimension physique du champs $G(x)$ est celle d'une longueur ($[L_G] = mc^2[G] \times [\ddot{x}]$, où $[L_G]$ est une énergie et $[\ddot{x}]$ l'inverse d'une longueur).

Bien entendu, nous pourrions introduire une constante de couplage plus générale, notée par exemple w (de la dimension d'une énergie), ce qui élargirait l'espace des paramètres de la théorie, mais pour le moment nous choisissons $w = mc^2$ et la légitimité de ce choix apparaîtra dans les discussions sur le principe d'équivalence qui suivront.

L'action de la particule durant un trajet est donnée par l'integrale sur le temps propre du Lagrangien total obtenu comme la somme du Lagrangien cinetique $L_K = \frac{mc^2}{2}\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$:

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} (L_K + L_G) d\tau \tag{3}$$

où l'intervalle élémentaire de temps propre $d\tau = ds/c$.

Determinons les équations du mouvement d'une particule dans le champ $G_\mu(x)$. D'une manière générale, avec un lagrangien $L = L(x, \dot{x}, \ddot{x})$ qui dépend des quadrivecteurs position, vitesse et accélération, on obtient par le principe de moindre action les équations d'Euler-Lagrange généralisées à l'ordre 2 données par: (forme relativiste des équations fondamentales données par Ostrogradski,[2], voir aussi[3],[4],[5]):

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^\mu}\right) - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) + \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \ , \tag{4}$$

où:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = mc^2 \partial_\mu G_\nu(x) \ddot{x}^\nu, \ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = mc^2 \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\nu, \ \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^\mu} = mc^2 G_\mu(x) \ ,$$

ainsi, d'après (4) on obtient:

$$\boxed{\eta_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + \varepsilon_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + \Delta_{\mu\nu\sigma}\dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma = 0} \ , \tag{5}$$

où nous avons défini les tenseurs $\varepsilon_{\mu\nu}$ et $\Delta_{\mu\nu\sigma}$ comme:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu} \quad &\equiv \partial_\mu G_\nu + \partial_\nu G_\mu \\ \Delta_{\mu\nu\sigma} \quad &\equiv \partial_\nu \partial_\sigma G_\mu = \tfrac{1}{2}(\partial_\nu \varepsilon_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \varepsilon_{\mu\nu} - \partial_\mu \varepsilon_{\nu\sigma}) \end{aligned}} \tag{6}$$

L'identité de la deuxième ligne de l'équation (6) s'obtient aisément par définitions des deux tenseurs.

Nous pouvons remarquer une ressemblance étonnante entre les équations du mouvement obtenues (5) avec les équations géodésiques de la théorie de la relativité générale (RG)[1],[6],[7],[8]:

- Le tenseur $\varepsilon_{\mu\nu}$ (similaire au tenseur métrique $g_{\mu\nu}$) est symétrique $\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\nu\mu}$; on l'appelle le *tenseur de déformations (gravitationnel)* par analogie au tenseur de déformation en mécanique des milieux continus[9] (MMC), étant donné qu'il se définit comme la partie symétrique du gradient (multiplié par deux) du quadrivecteur $G_\mu(x)$. Nous discuterons par la suite cette analogie avec la (MMC) qui n'est pas anodine.

- Le tenseur $\Delta_{\mu\nu\sigma}$ (similaire à la connection de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu\sigma}$) est symétrique sur les deux derniers indices: $\Delta_{\mu\nu\sigma} = \Delta_{\mu\sigma\nu}$, et est relié aux dérivées du champ $\varepsilon_{\mu\nu}$ (6). On appelle ce tenseur le *tenseur gradient des déformations (gravitationnel).*

Formellement, nous pouvons expliquer les similitudes avec les équations du mouvement en (RG) et celle pour une particule subissant le champ $G_\mu(x)$. En effet, en intégrant par partie l'action $S_G = \int L_G d\tau$, on obtient l'intégrale d'une dérivée totale plus une action $S'_G = \int d\tau \frac{mc^2}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ et donc l'action $S_K + S'_G$ est similaire à l'action en RG et les équations d'Euler-Lagrange donnent donc des équations du mouvement de la même forme que les équations géodésiques. Cet argument explique pourquoi la forme des équations de notre modèle et celle de la (RG) sont similaires, mais à la question de l'équivalence entre eux deux, le réponse est immédiate car le champ fondamental $G_\mu(x)$ est un champ vectoriel alors que le champ métrique est un champ tensoriel de rang 2, et de plus G_μ couple avec l'accélération de la particule, alors que le tenseur métrique couple avec le tenseur impulsion-énergie de la particule. Cependant, s'ils existaient simultanément dans la nature, les deux effets gravitationnels seraient complémentaires, et nous allons discuter dans la dernière partie comment il serait possible de les décrire dans un cadre commun.

II. PRINCIPES DE LA THÉORIE ET ÉQUATIONS DU CHAMP

A. L'induction de type gravitationnelle par des courants d'accélération de masses

Pour comprendre l'implication conceptuelle de la précédente remarque formelle sur la construction d'un champ vectoriel qui couple avec l'accélération, il faut réflechir sur le principe d'équivalence et sur sa possible réciproque. Nous allons donc d'abord dériver de façon heuristique les équations du champ à partir de la discussion sur le principe d'induction en question.

Considérons d'abord une masse ponctuelle se déplaçant dans un champ de gravité uniforme et constant $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, et un observateur placé dans un référentiel galiléen R muni d'un repère Euclidien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Tout le monde s'accorde à dire, d'après la théorie usuel de la gravitation Newtonnienne,[1],[6],[7],[8], que la l'accélération ne dépend pas de la masse de la particule à cause de l'identité entre la masse inerte et la masse grave; on a donc l'équation du mouvement suivante

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -g \ .$$

Dans le cas d'un champ de gravitation plus général

$$\frac{d^2\overrightarrow{x}(t)}{dt^2} = -\overrightarrow{\nabla}\Phi(t, \overrightarrow{x}) \ ,$$

où $\Phi(t, \overrightarrow{x})$ est le potentiel de gravitation et $d^2\overrightarrow{x}(t)/dt^2$ l'accélération tridimensionnelle de la particule. Le principe d'équivalence dit aussi que l'on peut trouver un référentiel localement inertiel (celui associé à la chute libre) dans lequel le champ de gravitation s'annule. Ainsi le champ de gravitation est localement équivalent à un champ d'accélération, ce qui signifie que nous ne pouvons pas distinguer localement l'effet du champ de gravitation à celui de l'accélération. On rappelle que l'équation du champ pour potentiel de gravitation en théorie Newtonienne est donnée par l'équation de Poisson suivante:

$$\Delta\Phi(t, \overrightarrow{x}) = 4\pi G\rho(t, \overrightarrow{x}) \ , \tag{7}$$

où $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial y^2$ est le Laplacien tri-dimensionnel et où $\rho(t, \overrightarrow{x})$ est la densité de masse dans l'espace.

Maintenant, considérons qu'il n'existe pas de champ de gravité et imaginons que par une source extérieure (non gravitationnelle), nous forcions une masse ponctuelle à se mouvoir de façon accélérée, uniforme et constante du point de vue du référentiel Galiléen R muni du même système de coordonnées Euclidien que celui qui précède. On suppose aussi que l'on néglige le champ de gravitation usuel produit par la masse en mouvement, (i.e. que le potentiel de gravitation Newtonien produit par la particule soit considéré comme nul $\Phi = 0$, ou de façon similaire pour la théorie relativiste de la gravité, en négligeant les perturbation métrique). Alors, par *réciproque* au *principe d'équivalence*, l'accélération de la masse, uniforme et constante, devrait correspondre à un champ de gravitation uniforme et constant, relativement à un référentiel inertiel dans lequel se place un observateur.

Dès lors, si l'on ajoute dans l'espace, une autre masse ponctuelle libre (aucune force ne s'exerce sur elle), suffisamment petite pour ne pas ajouter un champ de gravitation Newtonien, on pourrait supposer que celle-ci subisse un champ de gravitation qui serait induit par le déplacement de la première masse forcée de se déplacer de façon accélérée. Comme on l'a dit précédement, on suppose que le champ Newtonien (ou que les perturbations métriques) sont suffisament faibles pour ne pas avoir à s'en préoccuper. Alors, quelle est donc l'origine et la nature de ce champ ? L'expression du *champ d'accélération gravitationnel*, noté $\overrightarrow{a}_G(t,\overrightarrow{x})$ induit par le déplacement accéléré de la masse, doit tenir compte de la distribution spatiale de masse de la particule accélérée (localisée en un point à chaque temps t de son mouvement). Donc le champ d'accélération devrait lui aussi être présenté comme une distribution dans l'espace (les effets de propagation dans l'espace et dans le temps du champ, seront pris en compte dans dans le cadre de la cinématique relativiste). Autrement dit, le *principe d'induction* qui découle naturellement de la *réciproque du principe d'équivalence*, que nous venons d'énoncer dans l'exemple, dit que tout mouvement accéléré génère un champ de gravitation, peut se formuler de façon analogue au *principe d'inertie*, i.e. que la somme du champ de forces généré par le déplacement des masses et du champ de forces généré par le champ de gravitation est nulle:

$$\boxed{\rho(t,\overrightarrow{x})\overrightarrow{a}_P(t) = -\rho_G\overrightarrow{a}_G(t,\overrightarrow{x})}\ , \tag{8}$$

où $\rho(t,\overrightarrow{x})$ est la distribution de masse (par unité de volume), $\overrightarrow{a}_P(t)$ est l'accélération des masses, $\overrightarrow{a}_G(t,\overrightarrow{x})$ est le champ d'accélération et ρ_G est une constante de densité gravitationnelle.

Nous verrons en construisant la théorie de champ que le champ d'accélération $\overrightarrow{a}_G(t,\overrightarrow{x})$ s'exprime comme une combinaison linéaire des dérivées seconde du potentiel $\overrightarrow{G}(t,\overrightarrow{x})$. Ici, nous nous contentons d'une constructions heuristique, ainsi de façon similaire à l'équation (7), sauf qu'ici on regarde un potentiel vectoriel et non scalaire, on peut construire l'équation suivante reliant les densités de masses en accélération avec le potentiel vecteur :

$$\Delta\overrightarrow{G}(t,\overrightarrow{x}) + \alpha\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{G}\right) = -\kappa\rho(t,\overrightarrow{x})\overrightarrow{a}_P\ , \tag{9}$$

où $\kappa = \frac{1}{c^2\rho_G}$ est la constante de couplage et où α est une constante sans dimension que nous fixerons dans la suite. Le terme où apparait la divergence de $\overrightarrow{G}$ dans (9) est similaire à celui qui apparaît dans les équations électromagnétiques pour le potentiel vecteur que l'on peut annuler grâce à une transformation de jauge; on préfère garder ce paramètre pour le moment. Le passage relativiste, dans l'espace de Minkowski, se fait tout naturellement en introduisant un quadripotentiel vecteur $G_\mu(t,\overrightarrow{x})$, où $\overrightarrow{G}(t,\overrightarrow{x})$ représente sa partie spatiale. En transformant le Laplacien en d'Alembertien, et la source en densité de courant quadridimensionnelle $\frac{\rho(x)}{\gamma}\frac{du^\mu}{d\tau}$, où x est le quadrivecteur position $\frac{du^\mu}{d\tau}$ est la quadrivecteur accélération, on a l'équation de champ suivante :

$$\boxed{\Box G_\mu(x) + \alpha\partial_\mu\partial_\nu G^\nu(x) = -\kappa\rho(x)a_\mu} \tag{10}$$

avec $a_\mu = \frac{1}{\gamma}\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{du^\mu}{dt}$. La réciproque du principe d'équivalence dans le cadre relativiste Minkowskien est tout à fait similaire à celui énoncé plus haut dans le cadre Galiléen, en notant que les objets relativistes (impulsion, accélération) se définissent différemment de sorte à prendre en compte le principe de covariance relativiste.

Un travail plus subtile et délicat sera à faire lorsqu'il s'agira d'énoncer ce principe dans le cadre général de la relativité en présence du champ de Gravité Einsteinien, nous le discuterons dans la dernière section de l'article.

B. Les équations du champ

Remarquons que l'équation (10) est analogue à l'équation de propagation du potentiel vecteur électromagnétique et qu'en introduisant le tenseur physique $\varepsilon_{\mu\nu}$ défini par (6), en s'inspirant du second groupe des équations de Maxwell pour le tenseur de Faraday $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$:[1]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = -\mu_0 j_e^\nu,$$

où μ_0 est la constante magnétique du vide, $j_e^\nu = \rho_e(x)v^\nu$ est le quadrivecteur densité de courant pour une distribution $\rho_e(x)$ de charge, on pose que le groupe d'équations qui relient les champs aux sources est donné par :

$$\boxed{\partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu}(x) = -\kappa j^{(2)\nu}(x)}\ , \tag{11}$$

où le quadrivecteur courant d'accélération pour une distribution de masses $j^{(2)\nu}$, est défini comme:

$$j^{(2)\nu} \equiv \rho(x)a^\nu\ , \tag{12}$$

et où $\rho(x) = \sum_\alpha m_\alpha \delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}^{(\alpha)}(t))$ est la densité de particule et l'accélération $a^\nu = cdu^\nu/dt$. Notons que a^ν n'est pas un quadrivecteur mais $j^\nu(x) = \rho(x)a^\nu = \rho_0(x)\gamma a^\nu$ est un quadrivecteur car $\gamma a^\nu = c^2 du^\nu/ds$ et $\rho_0(x) \equiv \rho(x)/\gamma$ est la masse volumique propre, voir[1]. Pour le comprendre, il faut faire un raisonnement similaire à la construction du quadrivecteur densité de courant de charge; on cherche un invariant scalaire, base de l'action qui représente le couplage entre le champ G_μ et les masses en mouvement accélérées. En se basant ainsi sur l'action (2), et en rappelant que $dV dt = dxdydzdt$ est invariant, et sachant que la masse $dm = \rho dV = \rho_0 dV_0$ est elle aussi invariante, avec $dV = dV_0/\gamma$ et $dt = \gamma dt_0$, on trouve que $G_\mu \rho_0(x) \frac{du^\mu}{dt_0} dV_0 dt_0 = G_\mu \rho(x) \frac{du^\mu}{dt} dV dt$ est un invariant et que $\rho(x) a^\mu$ est donc un quadrivecteur.

On a posé $\alpha = 1$ de façon arbitraire certes, mais de sorte à ne pas ajouter de terme de trace du tenseur physique dans l'équation de champ (11). En prenant le choix de $\alpha = 1$, les équations (10) nous donnent alors les équations de propagation du potentiel vecteur $G_\mu(x)$. Notons que d'après pour la théorie (EM) nous avons $\alpha = -1$.

Avec ces précédentes équations, nous n'avons que quatre équations pour un total de 20 inconnues (16 pour le champ $\varepsilon_{\mu\nu}$ et 4 pour le potentiel G_μ). Le tenseur $\varepsilon_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu + \partial_\nu G_\mu$ est la partie symétrique du tenseur de dérivation du potentiel vecteur gravitationnel $2\partial_\mu G_\nu$, ce qui réduit à 10 le nombre d'inconnues pour celui-ci. Il doit à priori obéir à des équations de structure tout comme le tenseur de Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ qui se trouve être la partie antisymétrique du tenseur de dérivation du potentiel électromagnétique $2\partial_\mu A_\nu$. Pour le tenseur de Faraday, nous avons les équations de structure suivantes:

$$\partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{13}$$

Ces équations ne conviennent évidemment pas pour le tenseur symétrique $\varepsilon_{\mu\nu}$. Par contre il existe des équations pour la partie symétrique que l'on retrouve en mécanique des milieux continus pour le tenseur de déformations.[9] On les appelle les *équations de compatibilités*, elles s'écrivent pour notre problème de la façon suivante :

$$\partial_\mu \partial_\nu \varepsilon_{\sigma\rho} - \partial_\nu \partial_\sigma \varepsilon_{\rho\mu} + \partial_\sigma \partial_\rho \varepsilon_{\mu\nu} - \partial_\rho \partial_\mu \varepsilon_{\nu\sigma} = 0 \ . \tag{14}$$

Ces équations sont faciles à vérifier en utilisant la définition du tenseur de gravitation (6). Notons que le nombre d'équations indépendantes sont de 6 en trois dimensions et de 10 en quatre dimensions, étant donné que nous avons 10 champs indépendants dans le tenseur $\varepsilon_{\mu\nu}$.

Ainsi, dix équations seulement sont nécessaires; contractons ainsi les indices μ avec ρ dans (14), de sorte obtenir les dix équations suivantes:

$$\boxed{\Box \varepsilon_{\nu\sigma} + \partial_\nu \partial_\sigma \varepsilon^\mu_\mu = \partial_\nu \partial_\mu \varepsilon_\sigma{}^\mu + \partial_\sigma \partial_\mu \varepsilon_\nu{}^\mu \ .} \tag{15}$$

On peut dériver directement les *équations de propagation* du champ en introduisant (15) dans la dérivée symétrisée de (11) :

$$\boxed{\Box \varepsilon_{\nu\sigma}(x) + \partial_\nu \partial_\sigma \varepsilon^\mu_\mu(x) = -\kappa \xi^{(2)}_{\nu\sigma}(x)} \tag{16}$$

où le tenseur symétrique des contraintes $\xi^{(2)}_{\nu\sigma}(x) \equiv \partial_\sigma j^{(2)}_\nu(x) + \partial_\nu j^{(2)}_\sigma(x)$.

Remarquons que contrairement à la densité de courant de masse conservée $j^{(1)\mu} \equiv \rho(x)v^\mu$, le vecteur densité de masses accélérées $j^{(2)\mu} = \rho(x)a^\mu$ ne se conserve généralement pas. Et d'ailleurs, les équations de propagations du potentiel vecteur (10), où celles pour le champ physique (16), sont cohérentes avec cette non-conservation du quadricourant $j^{(2)\mu}$ puisqu'en contractant les indices ν et σ dans cette dernière, on obtient une équation de propagation pour la divergence du potentiel vecteur:

$$\Box\varepsilon^\nu_\nu = -\kappa\partial_\nu j^{(2)\nu}(x) \ . \tag{17}$$

Cette équation met en évidence la différence fondamentale avec la théorie (EM) en ce qui concerne la jauge de cette dernière théorie notamment liée au fait que la théorie possède des degrés de liberté non-physiques, ce qui est formellement relié à l'antisymétrie du tenseur physique ou autrement dit à la conservation du courant de charge. Dans la théorie du chanp (G) formulée ici, nous obtenons ainsi 14 équations, 4 équations reliées aux sources (équations (11)) et 10 équations de structures dites de compatibilités (équations (15)) pour 14 inconnues, dont 4 étant les champs du potentiel vecteur $G_\mu(x)$ et 10 étant les champs physiques $\varepsilon_{\mu\nu}(x)$, et donc en conclusion la théorie n'est pas de jauge.

Pour résoudre les équations du champ vecteur (10), une méthode standard consiste à passer dans l'espace des moments en prenant les composantes de Fourier du champ:

$$G_\mu(x) \mapsto \widehat{G}_\mu(k) \equiv \int_{R^1} \frac{dk_0}{2\pi} \int_{R^3} \frac{d\overrightarrow{k}}{(2\pi)^3} e^{i(k_0x_0 - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{x})} G(x_0, \overrightarrow{x})$$

et des dérivées $\partial_\mu \mapsto -ik_\mu$, où k_μ sont les composantes du quadrivecteur d'onde k (choisissons la définition normalisée de la transformée de Fourier). On écrit alors les équations (10) (avec $\alpha = 1$) dans les composantes de Fourier:

$$k^2\widehat{G}_\mu(k) + k_\mu k_\nu \widehat{G}^\nu(k) = \kappa\widehat{j}^{(2)}(k) \ , \tag{18}$$

où $\widehat{j}^{(2)}(k)$ est la transformée de Fourier de la densité de courant $j^{(2)}(x)$. Il est intéressant de remarquer que pour le cas de la propagation d'une onde dans le vide (c.f. équations (18) et avec seconds membres nuls), en plus des composantes transverses de spin 1 et de masses nulles, on a deux composantes longitudinales de spin 0 et de masse nulle, contrairement aux ondes (EM). Pour le voir, il suffit de faire le même exercice que pour l'(EM), à savoir projeter les composante du champ $\widehat{G}_\mu(k)$ sur la base où le quadrivecteur d'onde s'écrit $k = (k_0, 0, 0, |\overrightarrow{k}|)$ et de remarquer qu'étant donné que le signe entre les deux termes du membre de gauche de (18) est positif, la projection sur l'axe de propagation spatial de l'onde $(0,0,0,1)$ et temporel $(1,0,0,0)$ ne sont généralement pas nuls car il suffit d'annuler k^2 (i.e. la masse de l'onde) pour préserver l'égalité. Cette conclusion est donc cohérente avec la remarque du paragraphe précédent, à savoir que la théorie possède autant d'équations que d'inconnues, ce qui en fait une théorie de "contrainte" analogue à la théorie des milieux continus[9] (en référence au tenseur des contraintes), et qui ne possède pas de degrés non-physiques contrairement à la théorie (EM).

Maintenant, considérons les solutions en présence de courant d'accélération de masses. Remarquons en effet que l'espace est considéré comme 'vide' pour la théorie s'il est sans présence de matière ou que la matière se déplace sans accélération, i.e. de façon inertielle. Je rappelle que la notion de gravité induite par l'inertie n'est pas prise en compte dans cette théorie, mais dans la théorie de la (RG). Pour trouver les solutions pour le potentiel vecteur $G_\mu(x)$ en présence de sources, il suffit de résoudre dans l'espace des moments les équations (18) et ensuite de prendre la transformée de Fourier inverse (normalisée) des solutions $\widehat{G}_\mu(k)$ qui d'après (17) et (18) sont données par :

$$\widehat{G}_\mu(k) = \kappa \left(\frac{\widehat{j}^{(2)}_\mu(k)}{k^2} - k_\mu \frac{k^\nu \widehat{j}^{(2)}_\nu(k)}{2k^4} \right) \tag{19}$$

Il n'est pas nécessaire pour le moment d'expliciter en détail les solutions générales car comme nous allons le voir dans la section suivante, les solutions deviennent facilement solubles dans certains cas particuliers qui nous permettent d'illustrer la théorie suffisamment pour le moment. Nous nous contenterons donc de discuter succintement la forme des solutions de (10) (pour $\alpha = 1$) à partir de la transformée de Fourier inverse de (19). Le premier terme du membre de gauche de (19) est le terme attendu car il donne une contribution de l'ordre $1/r$ (où $r \equiv ||\overrightarrow{x}||$ est la distance entre l'observateur et la source au temps t) de façon similaire au potentiel retardé en électromagnétisme[1] :

$$G^{(1)}_\mu(t, \overrightarrow{x}) = -\kappa \int_{R^3} d\overrightarrow{x}' \frac{j^{(2)}_\mu(t - ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}'||/c, \overrightarrow{x}')}{4\pi ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}'||} \ , \ t > 0 \ ,$$

Quant au deuxième terme, il peut s'écrire comme une convolution spatiale entre $1/r$ et le quadrivecteur (qui joue le rôle d'une densité de courant effective) $K_\mu(t, \overrightarrow{x}) \equiv \partial_\mu \partial^\nu G^{(1)}_\nu(t, \overrightarrow{x})$

dont la valeur est prise au temps $t - ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}'||/c$:

$$G_\mu^{(2)}(t, \overrightarrow{x}) = \kappa \int_{R^3} d\overrightarrow{x}' \frac{K_\mu(t - ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}'||/c, \overrightarrow{x}')}{4\pi||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}'||} \ , \ t > 0 \ .$$

Notons que contrairement à la théorie (EM), on ne peut pas supprimer ce terme (cela nécessite une transformation de jauge du potentiel). Mais dans certains cas (voir les exemples donnés dans la section ci-après), ce terme ne contribuera pas aux solutions. En tout cas, dans le cas général, ce terme doit être pris en compte, mais remarquons que si l'observateur est loin de la source, le terme prédominant sera $G^{(1)}$ car l'ordre de décroissance de celui-ci est en $1/r$ tandis que celui de $G^{(2)}$ est en $1/r^2$ à cause des deux convolutions spatiales successives.

Commentaire sur la constante de couplage κ

Se pose aussi une interrogation sur le signe de la constante κ, est-elle positive ou négative? Contrairement aux lois de la gravitation Newtonienne ou Einsteinienne, on ne peut pas dire si la force est attractive ou répuslive uniquement en fonction du signe de la constante, notamment car la source n'est pas liée à l'impulsion-énergie des masses mais à leur l'accélération. La qualité attractive ou répulsive pourrait donc dépendre à priori du signe du produit scalaire entre le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ et le vecteur accélération $d\overrightarrow{v}/dt$ ainsi que du signe du vecteur accélération, tous deux intervenants dans l'expression du quadrivecteur densité de courant des masses accélérées.

Pour la suite, il est commode d'introduire une nouvelle constante λ de la dimension d'une longueur, de sorte à relier les constantes κ et $\frac{8\pi G}{c^4}$:

$$\kappa = \pm\frac{8\pi G\lambda^2}{c^4} \ . \tag{20}$$

On laisse ainsi le choix sur le signe de κ. Cependant, rappelons la discussion de la Section dans laquelle nous avons discuter les principes de la théorie et donné de façon heuristique les équations de champs (10) pour G_μ. Nous avons alors introduit une constante $\rho_G = 1/(\kappa c^2)$ (de la même façon que μ_0 est relié à ε_0) et ainsi le signe de ρ_G est égale au signe de κ. Mais dans l'interprétation que nous avons faite du principe d'induction, nous avons dit que la somme des champs de forces dus à l'accélération des masses en mouvement et au champ vectoriel devaient être être nulle d'après le principe d'action/réaction, voir (8). Ainsi, nous pouvons interpréter la constante $\rho_G c^2$ comme une "densité d'énergie" gravitationnelle que nous assumons donc positive. Ainsi Dans l'équation (20) nous choisissons donc le signe positif

$$\kappa = \frac{8\pi G\lambda^2}{c^4} \ . \tag{21}$$

et si l'expérience venait à nous contredire, ça ne poserait pas de grands problèmes de modifier les équations qui suivent en changeant le signe de κ.

C. Remarque sur l'analogie avec la théorie de déformation d'un milieu continu

Il est intéressant de noter la ressemblance entre le groupe d'équation (11) et les équations de contraintes sur un milieu continu tridimensionnel[9]. En posant

$$\sigma_{\mu\nu}(x) \equiv \rho_G \left(\varepsilon_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}(1-\alpha)\eta_{\mu\nu}\varepsilon^\rho_\rho \right) \ ,$$

on définit le tenseur des contraintes pour des petites déformations (linéaires) sur le milieu continu où ρ_G est l'analogue du module d'Young (noté usuellement E), et l'analogue du coefficient de Poisson (qui se note usuellement ν), ici est relié à la valeur $1-\alpha$. En posant $\alpha = 1$, l'équation (11) peut se réécrire :

$$\partial_\mu \sigma^{\mu\nu} = -\rho(x) a^\nu \ . \tag{22}$$

L'équation (22) peut s'interpréter de façon similaire à l'équation de contrainte sur un milieu continu qui se voit comme une équation d'équilibre entre les contraintes et les forces s'exerçant sur le milieu. Ainsi, d'après les équations (6), (11), (14), on peut lire cette théorie de champ (G) comme une théorie de déformation linéaire de milieu continu invariante de Lorentz. L'invariance de Lorentz impose nécéssairement un degré de déformation temporel, d'où la présence de champ ε_{00} et $\varepsilon_{0i}, \ i = 1,2,3$ qui peuvent se lire comme le champ de *contraction/dilatation temporelle* et respectivement comme les champs de *cisaillement spatio-temporels*. Pour les champs $\varepsilon_{ij}, \ i,j = 1,2,3$, on a de façon similaire au tenseur de déformation tridimensionnel des champs de *contraction/dilatation spatiaux* pour la partie diagonale et des champs de *cisaillement spatiaux* pour la partie hors-diagonale. Ainsi on peut interpréter cette théorie comme un milieu continu, vivant dans l'espace quadridimensionnel et qui se déforme suivant les lois d'invariance relativiste, un peu comme une nappe sur laquelle se propagerait les champs et les particules, celle-ci déformant le milieu si elle s'écarte des “lignes droites” (les trajectoires inertielles). Nous reviendrons sur cette remarque importante lorsque nous discuterons comment formuler la théorie (G) dans le cadre générale de la relativité.

III. NOUVEL EFFET DE TYPE GRAVITOMAGNÉTIQUE, CIRCUIT DE MASSES ACCÉLÉRÉES

A. Position du problème

Imaginons que l'on regarde tourner un objet massif à l'échelle terrestre ou astronomique, ou un circuit de masses en mouvement circulaire (en rotation uniforme ou non). Alors dans ces cas, le mouvement de rotation devrait induire, aussi petit qu'il soit, en plus d'un champ de gravité prédit par les équations (GEM)[10],[6],[8] un champ de gravité prédit par (GEM-G) dû à l'accélération du déplacement, qui dans le cas circulaire se trouve être radial. Cet effet n'est pas prédit par les équation (GEM) et ne peuvent pas se déduire des équations (RG) car le lien entre le champ et les sources est contenu dans la densité d'énergie (d'où l'analogue avec l'(EM) lorsque l'on ne garde que les termes en v/c) et donc l'effet explicite (en terme de couplage direct) dû à l'accélération n'est pas pris en compte. Il s'agit donc d'un nouvel effet que nous pourrions mesurer si bien sûr le couplage entre l'accélération et le champ supposé dans la théorie existe dans la nature.

Lorsque j'ai dit que nous supposions l'effet petit, cela signifie que nous nous limitons aux ordres v/c et à l'approximation de champ faible, i.e. ici $\varepsilon_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$. Nous avons besoin d'une hypothèse de plus, laquelle venant d'une part du fait que nous supposions l'effet géométrique de la gravitation (i.e. celui prédit par la (RG) qui couple avec la présence de densité-énergie) comme une correction linéaire à Minkowski, c'est à dire obéissant aux équations (GEM) et d'autre part que le couplage entre le champ géométrique $g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ et le champ $\varepsilon_{\sigma\rho}$ est négligeable, i.e. que l'on néglige tous les termes de la forme $h_{\mu\sigma}\varepsilon^{\nu\rho}$, et toutes les contractions d'indices possibles. On a donc en premières approximations une théorie découplées aux ordres v/c et linéaire. Ainsi pour ce modèle simple, il suffit d'ajouter les deux effets, c'est à dire que l'accélération d'une particule test subissant les deux effets se calcul simplement par:

$$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{F}_h + \overrightarrow{F}_G \ , \tag{23}$$

où $\overrightarrow{F}_h = m\left(\overrightarrow{E}_h + \frac{1}{c}\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}_h\right)$ est la force de Lorentz gravitomagnétique (GEM) provenant du champ métrique et $\overrightarrow{F}_G = m\left(\overrightarrow{E}_G + \frac{1}{c}\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}_G\right)$ est la force de Lorentz gravitomagnétique (GEM-G) provenant du champ $\varepsilon_{\mu\nu}$. Il s'agit maintenant de trouver l'expression de cette dernière et les équations du mouvements des champs intervenant dans l'expression de la force.

B. Equations (GEM-G)

Considérons ici uniquement la présence d'effet d'accélérations des masses (on néglige l'effet usuel de gravitation). Pour obtenir (23) il suffira d'ajouter les deux forces analogues à la force de Lorentz, celle usuel de gravitation $\overrightarrow{F}_h$ étant déjà connue.[10] D'après les équations du mouvement (5) d'une particule subbissant le champ $G_\mu(x)$:

$$(\eta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu})\frac{du^\nu}{dt} = -\Delta_{\mu\nu\sigma}u^\nu v^\sigma \ ,$$

et en considérant que $v/c \ll 1$ et que $\varepsilon_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$, on a :

$$(\eta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu})\frac{du^\nu}{dt} \approx \eta_{\mu\nu}\frac{du^\nu}{dt} \ ,$$

$$\Lambda_{\mu\nu\sigma}u^\nu v^\sigma \approx \begin{cases} \Lambda_{000}c + 2\Lambda_{0j0}v^j, \ \mu = 0 \\ \Lambda_{i00}c + 2\Lambda_{ij0}v^j, \ \mu = i \neq 0 \end{cases} \tag{24}$$

et donc nous trouvons les équations approchées du mouvement à l'ordre v/c :

$$\frac{du_\nu}{dt} \approx -\partial_\mu\phi + f_{\mu\nu}u^\nu = \begin{cases} -\frac{\partial\phi}{\partial t} + f_{0j}v^j, \ \mu = 0 \\ -c\frac{\partial\phi}{\partial x^i} + cf_{i0} + f_{ij}v^j, \ \mu = i \neq 0 \end{cases} \tag{25}$$

où $\phi \equiv \varepsilon_{00}/2$ et avec $f_{\mu\nu}$, analogue au tenseur de Faraday, défini par :

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\varepsilon_{\nu 0} - \partial_\nu\varepsilon_{\mu 0} \ , \tag{26}$$

où la matrice est donnée par:

$$[f] = \begin{pmatrix} 0 & E_{G,x} & E_{G,y} & E_{G,z} \\ -E_{G,x} & 0 & -B_{G,z} & B_{G,y} \\ -E_{G,y} & B_{G,z} & 0 & -B_{G,x} \\ -E_{G,z} & -B_{G,y} & B_{G,x} & 0, \end{pmatrix} \ , \tag{27}$$

avec d'après (26) et (27):

$$\begin{cases} \overrightarrow{E}_G = -\overrightarrow{\nabla}\Phi_G - \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{A}_G}{\partial t} \\ \overrightarrow{B}_G = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}_G \end{cases} \tag{28}$$

où $\Phi_G \equiv \varepsilon_{00}$ et $\overrightarrow{A}_G.\overrightarrow{e}_i \equiv -\varepsilon_{i0}$.

Remarquons que d'après (25), nous avons un champ $f_{\mu\nu}$ similaire au champ (EM) , mais aussi un champ supplémentaire qui tient compte de ε_{00}, qui vient comme conséquence du fait que le champ $\Delta_{\mu\nu\sigma}$ s'écrit comme une somme de trois termes et on ne peut donc pas, même en approximation de faibles vitesses, garder uniquement sa partie antisymétrique pour ne trouver que $f_{\mu\nu}$. Nous avons le même problème lorsque l'on écrit les équation (GEM) à partir de la linéarisation des équations géodésique en (RG). La conséquence est qu'en régime stationnaire, i.e. lorsque on annule tous les termes où la dérivée ∂_t apparraît, au le champ gravito-électrique $\overrightarrow{E}_G$ s'ajoute cette contribution et donne alors une expression du champ modifiée comme étant le gradient du champ $\varepsilon_{00}/2$ au lieu de ε_{00}. La contribution du champ gravito-magnétique $\overrightarrow{B}_G$ est alors double car celle-ci n'est pas divisée par deux. Cette remarque sera à prendre en compte dans les expemples de courant qui seront traîtés dans la suite.

Nous allons maintenant regarder les équations auquelles obéissent les champs analogues aux champs électriques et magnétiques provenant du tenseur $f_{\mu\nu}$, d'après (16):

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu \varepsilon^{\nu 0} - \partial_\mu \partial^\nu \varepsilon^{\mu 0} \tag{29}$$

$$= -\kappa \partial^0 j^{(2)'\nu} \equiv -\frac{8\pi G\lambda}{c^4} j^\nu \ . \tag{30}$$

où $j^\nu \equiv \frac{\lambda}{c}\frac{\partial}{\partial t} j^{(2)'\nu}$ est un courant effectif obtenu à partir du quadrivecteur densité de courant d'accélération effectif $j_\nu^{(2)'}(x)$ pour lequel la transformée de Fourier est donnée par :

$$\widehat{j^{(2)'\nu}}(k) = \widehat{j}^{(2)\nu}(k) - k^\nu \frac{k^\mu \widehat{j}_\mu^{(2)}(k)}{k^2} \ , \tag{31}$$

on remarque que ce courant est conservé $\partial_\nu j^{(2)'\nu}(x) = 0$, en cohérence avec la définition du tenseur antisymétrique $f_{\mu\nu}$.

Ainsi, sachant que le tenseur $f_{\mu\nu}$ obéit au même groupe d'équations de structure que le tenseur de Faraday, on a les équations suivantes pour les champs gravitomagnétiques :

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{B}_G(t,\overrightarrow{x}) = 0 \\ \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E}_G(t,\overrightarrow{x}) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B}_G(t,\overrightarrow{x}) \\ \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E}_G(t,\overrightarrow{x}) = -\frac{8\pi G\lambda}{c^4}\Upsilon(t,\overrightarrow{x}) \\ \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B}_G(t,\overrightarrow{x}) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E}_G(t,\overrightarrow{x}) + \frac{8\pi G\lambda}{c^4}\overrightarrow{J}(t,\overrightarrow{x}) \end{cases}}\ , \qquad (32)$$

où les champs $\Upsilon(t,\overrightarrow{x})$ et $\overrightarrow{J}(t,\overrightarrow{x})$ sont les composantes temporelles et spatiales de la densité de courant $j^\mu(x)$ définie plus haut. Cette subtilité est à retenir pour les deux exemples qui suivent.

Dans le cas stationnaire, i.e. lorsque les termes de dérivées explicites par rapport au temps dans (28) et (36) sont nuls, d'après (25), on trouve des équations du mouvement pour la partie spatiale plus simple et ressemblant aux équations (GEM) :

$$\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{E'}_G + \frac{\overrightarrow{v}}{c}\times\overrightarrow{B}_G\ , \qquad (33)$$

où $\overrightarrow{E'}_G \equiv \overrightarrow{\nabla}(\phi)$ est le champ électro-gravitationnel modifié par un facteur $1/2$ car $\Phi_G = 2\phi$.

Lorsque nous ne sommes pas en régime stationnaire, nous avons déjà remarquer que dans l'équation (25) apparaît en plus du tenseur antisymétrique $f_{\mu\nu}$, le quadri-gradient $\partial_\mu\phi$. Cette composante joue bien sûr un rôle fondamental dans les équations du mouvement puisqu'il peut se voir en approximation Newtonnienne (si l'on ne garde que les composantes spatiale de l'équation) comme un champ de gravitation qui dérive d'un potentiel de gravitation $\phi = \varepsilon_{00}/2$. Nous devons alors écrire les équations de champ pour ϕ, ce qui n'a pas était fait, même si comme nous l'avons dit plus haut, dans le cas stationnaire on peut l'inclure dans le champ gravito-électrique. Rappelons-nous que les 10 équations pour les champs $\varepsilon_{\mu\nu}$ sont données par (16), ce qui nous donne au facteur 2 près celle pour ϕ. Mais on voit apparraître dans cette équation la trace ε^μ_μ, c'est pourquoi il faut utiliser la même procédure que celle utilisée pour trouver (19) où la solution s'écrit en fonction d'une densité de courant effective. Ainsi, sachant que $\varepsilon_{00} = 2\partial_0 G_0$, en utilisant (18) et (19), on trouve l'équation suivante :

$$\boxed{\Box\phi(t,\overrightarrow{x}) = \frac{\kappa}{c}\frac{\partial}{\partial t}j^{(2)''0}((t,\overrightarrow{x}))}\ , \qquad (34)$$

où la transformée de Fourier du quadrivecteur densité de courant effectif $j^{(2)''\mu}(x)$, différent de clui introduit plus haut $j^{(2)'\mu}(x)$, est donné par $\widehat{j}^{(2)''\mu}(k) = \widehat{j}^{(2)\mu}(k) - \frac{k^\mu}{2k^2}k_\nu\widehat{j}^{(2)\nu}(k)$ (la différence avec $\widehat{j}^{(2)''\mu}(k)$ vient du facteur $1/2$ dans le second terme du membre de droite indiquant sa non conservation dans le cas général). Cette équation est fondamentale dans approximation Newtonienne, où l'on ne regarde ni les effets gravito-magnétiques ni les termes en ∂_t (dans les équation de champs, pas des les sources), car elle devient une équation de Laplace :

$$\Delta\phi(t, \overrightarrow{x}) = -\frac{8\pi G}{c^2}\rho_{eff}(t, \overrightarrow{x}) \ , \tag{35}$$

qui s'interprète comme l'équation de champ Newtonienne d'un champ gravitationnelle pour une densité de masse effective $\rho_{eff}(\overrightarrow{x}) \equiv \frac{\lambda^2}{c^3}\partial_t j^{(2)''0}((t, \overrightarrow{x}))$. Nous allons voir cet effet dans l'exemple d'un courant uniformément accéléré sur un fil unidimensionnel. A priori, ce champ devrait approter un terme correctif à la théorie de Newton lorsque les sources du champ gravitationnel sont en accélération. Il n'y a, à l'évidence, pas d'observation contredisant la valeur du potentiel Newtonnien, mais bien entendu tout dépend de la valeur de a_0. Il est possible que selon cette valeur, les corrections ne soient observables que dans des systèmes à des échelles très grandes ou très petites devant les échelles habituelles d'observation des effets gravitationnels. Par exemple, si la valeur de λ est petite, on aura peut-être à chercher des corrections à petites échelles spatiales (en dessous du micromètre). C'est d'ailleurs un domaine de recherche actuelle et on espère observer des corrections au potentiel Newtonien, ce que l'on appelle la "5ème force". Par contre, si la valeur de λ est très grande, on aura plutôt à regarder à des échelles astronomiques ou astrophysiques. Par ailleurs, il existe certains phénomènes qui ne sont pas encore expliqués correctement, pensons à la rotation des galaxies, l'accélération de l'expansion. Ici, je ne prétends pas expliquer ces phénomènes, la théorie présentée n'en est qu'à sa génèse, mais gardons à l'esprit ces remarques qui pourront motiver les travaux futurs, essayant de voir quelle serait l'effet de la présence d'un tel champ dans les domaines actuellement encore à l'étude.

C. Exemples de circuits de courant de masses en accélération

Nous voulons calculer pour des modèles simples les expressions de ces champs et de la force de Lorentz (GEM-G) avoir des exemple simples pour illustrer les équations précédentes.

1. Circuit linéaire homogène en densité - accélération uniforme et constante

Prenons comme premier exemple le cas le plus évident, à savoir le champ induit par un courant de densité homogène de masses en accélération uniforme et constante. Considérons que la densité de masses $\rho(t, \overrightarrow{r}) = \rho_l \delta(x)\delta(y)$ linéique constante selon l'axe z.

On va d'abord calculer l'expression des composantes du courant $j^{(2)\mu}$ puis il nous faudra calculer pour les courants effectifs qui interviennent dans des équations (36) et (34). Au point P qui se trouve en (r, θ, z) dans une base cylindrique, on peut calculer quelle est l'accélération au temps $t > t_0 \equiv 0$. C'est un problème classique dont je rappellerai succintement les résultats, l'exercice pouvant se trouver dans la référence classique suivante[1] ainsi que dans cette autre référence très utile[11]. On considère qu'au temps $t = 0$, toutes les particules sont animées d'une vitesse nulle, si bien que le facteur $\gamma = 0$. Ainsi, considérant que l'équation du mouvement d'une particule en mouvement accéléré uniforme et constant est donnée par $\frac{d(\gamma v)}{dt} = a$, où v est la composante de la vitesse selon l'axe z et a la composante de l'accélération suivant le même axe, on trouve comme vitesse $v(t) = at/\sqrt{1 + a^2t^2/c^2}$ et comme composante temporelle pour l'accélération $a^\mu \equiv du^\mu/dt$ (du point de vue du référentiel Galiléen qui se trouve au repos au temps $t = 0$) qui est $a^0 = \gamma^3 \dot{v} v/c = \frac{a^2t/c}{\sqrt{1+a^2t^2/c^2}}$. On donne alors l'expression du quadrivecteur densité de courant de masses accélérées :

$$j^{(2)\mu}(t, x, y, z) = \rho_l \delta(x)\delta(y) \begin{pmatrix} \frac{a^2t/c}{\sqrt{1+a^2t^2/c^2}} \\ a\overrightarrow{e}_z \end{pmatrix}$$

Regardons maintenant le problème en limite non relativiste, i.e. pour des vitesses de déplacement très petites devant c, où de façon équivalente, pour de temps relativement cours, à savoir ici pour $t \ll c/a$. On trouve alors que la densité de courant devient :

$$j^{(2)\mu}(t, x, y, z) = \rho_l \delta(x)\delta(y) \begin{pmatrix} a^2t/c \\ a\overrightarrow{e}_z \end{pmatrix}$$

Ce qui nous interesse ici d'après les équations (36) et (34) c'est plutôt la dérivée partielle par rapport au temps de ce courant. Ainsi dans l'approximation non relativiste, on trouve que :

$$\frac{\lambda}{c}\frac{\partial}{\partial t} j^{(2)\mu}(t, x, y, z) = \begin{pmatrix} \lambda\rho_l\delta(x)\delta(y)a^2/c^2 \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix} = j^\mu(t, x, y, z)$$

car le courant effectif $j^{(2)'\mu}$ ne dépend pas explicitement du temps (il est facile de le vérifier en prenant la transformée inverse de (31) où le second membre s'écrit comme une convolution spatiale entre $1/r$ et $\partial_\nu \partial_\mu j^{(2)\mu}$ qui ne dépend plus de t).

On reconnait tout de suite l'analogie avec le champ électrostatique et gravitostatique créé par une distribution de charges, respectivement de masse, sur un fil infini, l'analogue de la distribution de masse étant donnée par $\rho_l \delta(x)\delta(y)a^2\lambda^2/c^4$ de sorte à homogénéiser les dimensions. Ainsi la densité effective linéique de masse est donnée par $\mu_l \equiv \rho_l a^2/a_0^2$, où la constante d'accélération $a_0 \equiv c^2/\lambda$, et d'après (35), (28) et (33), on trouve la formule bien connu pour le champ gravitostatique créé par un fil infini de densité de masse uniforme :

$$\overrightarrow{E'}_G(r) = +\overrightarrow{\nabla}\phi = -\frac{8\pi G}{c^2}\frac{\mu_l}{r} = -\frac{8\pi G}{c^2}\frac{\rho_l}{r}\frac{a^2}{a_0^2} \ .$$

On remarque donc que ce comportement stationnaire, au sens d'un courant de masse en accélération, devrait selon les précédentes équations créer un champ stationnaire, qui est de nature à priori différente du champ gravitostatique, mais qui possède des propriétés similaires. En fait, on voit que s'il on ajoute, dans l'approximation Newtonienne, le calcul du champ gravitostatique créé par la distribution de masses (on néglige l'effet gravitomagnétique), on doit ajouter au champ $c^2\overrightarrow{E'}_G(r)$ au champ Newtonien (le facteur c^2 vient de la convention de définition du champ), on trouve donc le champ total :

$$\overrightarrow{g}_{tot}(r) = \overrightarrow{g}(r) + c^2\overrightarrow{E'}_G(r) = -\frac{8\pi G\rho_l}{r}\left(1 + \frac{a^2}{a_0^2}\right) \ ,$$

et donc on peut voir le nouveau champ comme une correction au potentiel Newtonien, proportionnelle au carré de l'accélération divisé par le carré d'une constante.

2. *Spire homogène en densité - rotation uniforme et constante*

Nous allons procéder à une analyse similaire à l'exemplce précédent en considérant cette fois une spire circulaire dans laquelle circule un courant de masses constant de densité homogène (identique en tout point de la spire) $\rho(t, \overrightarrow{r}) = \rho_l \delta(z)\delta(r - R)$, où ρ_l est la densité linéique de particule au rayon $r = R$. L'objectif ici est de calculer le champ gravitomagnétostatique $\overrightarrow{B}_G$ créé par la spire en un point M de l'espace.

Pour un mouvement circulaire constant[11], on a l'expression pour la vitesse au point en coordonnées cylindrique (r, θ, z)

$$u^\mu = (\gamma, \frac{\gamma}{c} r\omega \overrightarrow{e}_\theta) \ ,$$

avec ω la vitesse angulaire constante (ne dépend ni de t, ni de θ). Notons que $\gamma = (1 - r^2\omega^2/c^2)$ et est donc constante, ainsi on trouve comme expression pour l'accélération :

$$a^\mu \equiv c\frac{du^\mu}{dt} = (0, -\gamma r\omega^2 \overrightarrow{e}_r) \ .$$

D'après (12) nous trouvons facilement pour la densité de courant de masses accélérées par la rotation, et on en déduit que la densité de courant effective est donnée par:

$$j^\mu = \frac{\lambda}{c}\frac{\partial}{\partial t}j^{(2)\mu} = \rho_l \delta(z)\delta(r-R)\frac{\lambda}{c}\frac{da^\mu}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\lambda}{c}\rho_l\delta(z)\delta(r-R)\gamma r\omega^3\overrightarrow{e}_\theta \end{pmatrix}$$

car la divergence de $\frac{\partial}{\partial t}j^{(2)\mu}$ est nulle (donc pas de terme supplémentaire).

On a donc un courant effectif analogue à un problème magnétostatique pour le système d'un courant de charges constant dans un circuit circulaire. D'après (36), on trouve donc les équations gravitomagnétostatiques suivantes :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{B}_G(t, \overrightarrow{x}) = 0 \\ \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B}_G(t, \overrightarrow{x}) = \frac{8\pi G\lambda}{c^4}\overrightarrow{J}(t, \overrightarrow{x}) = -\frac{8\pi G}{c^3}\rho_{eff}(\overrightarrow{x})\overrightarrow{v} \end{cases} \tag{36}$$

où $\rho_{eff}(\overrightarrow{x}) \equiv \frac{\lambda^2}{c}\rho_l\omega^2\delta(r-R)\delta(z)$ et $\overrightarrow{v} = R\omega\overrightarrow{e}_\theta$, ce qui donne un courant effectif (des mêmes unités que celle d'un courant de masse) $\overrightarrow{j}_{eff}(\overrightarrow{x}) \equiv \rho_{eff}(\overrightarrow{x})\overrightarrow{v}$. Les solutions de ce problèmes sont bien connues en magnétostatique et sont données par la formule de Biot et Savart (le courant étant stationnaire) :

$$\overrightarrow{B}_G = \frac{8\pi G}{c^2} I \oint \frac{d\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|^3} \ , \tag{37}$$

avec $d\overrightarrow{OP}$ le déplacement élémentaire le long du circuit et où l'intensité du courant I s'écrit comme l'intégrale du courant sur la surface perpendiculaire à la tangente au cercle au point P :

$$I = \iint \overrightarrow{j}_{eff}.d\overrightarrow{S} = -\int dr \int dz \rho_l \delta(z)\delta(r-R)\gamma r\omega^3 = -\rho_l\gamma R\omega^3$$

En exemple, on peut calculer le champ en un point sur l'axe z de la spire[12] :

$$\overrightarrow{B}_G = -\frac{8\pi G\lambda}{c^4}\rho_l\gamma R\omega^3 \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\overrightarrow{e}_z \ ,$$

En perspectives, il sera intéressant de calculer à partir de (37) le champ gravito-magnétostatique créé par une spire en un point quelconque de l'espace, et ainsi on pourra, par intégration, en déduire le champ gravitationnel créé par un astre sphérique de densité volumique constante en rotation uniforme. Nous pourrons alors comparer les champs gravitomagnétiques induits (calculé à partir (GEM) issue de la théorie de la relativité générale et celle-ci). Le calcul n'est pas compliqué à faire et la solution s'exprime sous forme d'une tripe intégrale, mais un travail numérique sera à faire en plus d'une réflexion sur la problématique afin rendre le modèle pertinent en physique, notamment en référence aux expériences déjà faites[13].

IV. PREMIÈRE RÉFLEXION SUR L'INTÉGRATION DE LA THÉORIE D'INDUCTION DU CHAMP G_μ AU CADRE DE LA THÉORIE DE LA GRAVITATION RELATIVISTE

Nous avons supposé dans les sections précédentes que les deux champs de gravités étaient indépendants et que nous pouvions donc appliquer le principe de linéarité entre ces deux derniers. Il va de soit que nous pouvons considérer que cette approche est juste seulement dans le cadre d'une approximation de champs faibles. Dans le cadre de la théorie (RG), le problème est bien entendu plus compliqué étant donné que naturellement le champ vectoriel va coupler avec la métrique qui est déterminée par les équations du champ d'Einstein.

Nous devons donc d'abord revenir sur les principe de la théorie (G) adaptées au cadre générale de la relativité avant de proposer les équations de champs.

A. Retour sur le principe d'induction

1. Principe d'induction dans un référentiel localement inertiel

La théorie Einsteinienne de la gravitation relativiste postule le principe d'équivalence qui stipule qu'en tout point de l'espace, il existe un référentiel localement inertiel dans lequel s'annule la gravité. Ainsi, pour généraliser ce que l'on a appelé *le principe d'induction*, on postule que dans les référentiels localement inertiels, la théorie Minkowskienne du champ (G) reste valide; i.e. qu'une masse M localement accélérée (au sens où elle se trouve accélérée du point de vue du référentiel localement inertiel) génèrerait un champ vectoriel G_μ, qui aurait pour effet d'accélérer les particules tests, d'après les équations de mouvement (5).

Pour mieux comprendre comment le *principe d'induction locale*, nous allons partir d'une expérience de pensée similaire à l'expérience de l'ascenseur d'Einstein, mais qui s'interprètent ici différemment.

Considérons un ascenseur A dans lequel se trouve un observateur O qui tient une balle B dans une de ses mains. Nous allons imaginer le système dans deux situations. La première des situations est d'imaginer que l'ascenseur est accéléré uniformément dans le vide (loin de toute attraction gravitationnelle) par un système de propulsion. Alors, à un certain moment, l'observateur O lâche la balle B et la regarde tomber. L'observateur verra alors la balle accélérer uniformément. On néglige le champ de gravité créé par les masses de chacun des corps (O, A, B). Puisque la balle une fois lâchée est en mouvement libre, d'après le principe d'induction valide dans la théorie (G) Minkowskienne, comme du point de vue du référentiel associé à la balle (qui est inertiel), l'ascenseur et l'observateur sont accélérés (par une force de poussée non gravitationnelle), ils devraient donc générer un champ de gravité vectoriel.

La deuxième situation est d'imaginer que l'ascenseur est posé sur la surface de la Terre et que la taille de l'ascenseur est suffisamment petite pour considérer le champ de gravité de la Terre constant pour les dimensions de l'ascenseur. Alors, lorsque l'observateur O lâche la balle B, il la voit tomber avec une accélération constante. Si on ne parle pas du principe d'induction, la conclusion est que rien ne peut faire dire à l'observateur s'il est en présence d'un champ de gravité où si l'ascenseur est accéléré; les deux situations sont équivalentes. Maintenant, assumons le principe d'induction et le principe d'équivalence. D'après les conclusions de la première expérience et d'après le principe d'équivalence, on peut dire que du point de vue du référentiel localement inertiel associé à la balle B, l'observateur O et l'ascenseur A sont accélérés (ils ne sont pas en chute libre), ils vont tous deux générer un champ de gravité vectoriel.

2. Retour sur la réciproque du principe d'équivalence

Ce que l'on a appelé précédemment *la réciproque du principe d'équivalence*, prend tout son sens maintenant étant donné que nous incluons les lois de la gravité contrairement à la formulation théorie dans le cas Minkowskien. Mais cette théorie n'est pas inutile comme nous venons juste de le voir car si nous assumons le principe d'equivalence (ce qui est difficilement discutable), on comprend désormais que le principe d'induction est en quelque sore une conséquence de sa réciproque. En effet, le principe d'équivalence dit qu'un champ de gravitation est localement équivalent à un champ d'accélération, mais pour un champ d'accélération donné, existe-il toujours localement un champ de gravitation équivalent ? Ainsi, imaginons qu'il existe une masse ponctuelle accélérant dans un espace sans gravité, alors si le principe d'équivalence est réciproque, il devrait exister un champ gravitationnel équivalent généré par ce mouvement. Il existe en effet deux types d'accélérations qui ne sont pas équivalentes, l'une étant l'accélération équivalente au champ de gravitation Einsteinien (qui décrit un mouvement de chute libre et qui généralise donc la notion d'inertie) et l'autre étant l'accélération des corps provoquée par une source non gravitationnelle qui ne peut donc pas s'annuler dans un référentiel localement inertiel. Nous supposons donc que celle-ci peut générer un champ de gravitation de nature différente au champ Einsteinien, comme nous l'avons vu dans le cas Minkowskien qui reste localement valide en présence de gravitation Einsteinienne.

3. Formulation du principe d'induction

Revenons plus formellement à la notion d'accélération dans le cas générale de la relativité. Si une particule est en chute libre, alors son équation du mouvement est donnée par les équations géodésiques, où l'accélération généralisée (obtenue comme la dérivée covariante du quadrivecteur vitesse) s'annule:

$$\frac{Du^\mu}{Ds} = 0 \ ,$$

nous expliciterons dans la suite l'expression de cette dérivée dite covariante.

Ainsi, le principe d'induction généralisé dit que *si l'on force (par un procédé non gravitationnel) une masse ponctuelle M en mouvement à suivre une trajectoire qui s'écarte des trajectoires géodésiques,*

$$\frac{Du^\mu}{Ds} \neq 0 \ ,$$

un champ vectoriel G_μ, dit de déformation, sera induit et modifiera les trajectoires des masses et des champs dans l'espace.

Le travail qui va suivre est donc de formuler une théorie de gravité completée constituée de deux champs, l'un géométrique $g_{\mu\nu}$ et l'autre de déformation G_μ, complémentaire au premier.

B. Equations covariantes

Toutes les équations des sections précédentes sont covariantes de Lorentz et donc, il faut maintenant généraliser la théorie (G) en considérant la présence du champ métrique $g_{\mu\nu}(x)$. Considérons les connections dans l'espace Riemannien données par les symboles de Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma}(x) = \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\sigma}) \ , \tag{38}$$

à bien différencier des $\Delta_{\mu\nu\sigma}$ reliées au champs vectotiel G_μ.

Nous devons rendre covariantes les équations obtenues dans le cas Minkowskien. On remplace alors les dérivées partielles par les dérivées covariantes bien connues[1] pour définir le champ $\varepsilon_{\mu\nu}$:

$$\boxed{\varepsilon_{\mu\nu} \equiv D_\mu G_\nu + D_\nu G_\mu = \partial_\mu G_\nu + \partial_\nu G_\mu + 2\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} G_\sigma} \ . \tag{39}$$

Les équations (14) et (11) gardent la même forme, toujours en changeant les dérivées partielles en dérivées covariantes:

$$D_\mu D_\nu \varepsilon_{\sigma\rho} + D_\sigma D_\rho \varepsilon_{\mu\nu} = D_\nu D_\sigma \varepsilon_{\rho\mu} + D_\rho D_\mu \varepsilon_{\nu\sigma} \tag{40}$$

$$D_\mu \varepsilon^{\mu\nu} = -\kappa j^{(2)\nu} \tag{41}$$

où le quadrivecteur courant d'accélération de masses covariant $j^{(2)\nu}$ est défini comme:

$$j^{(2)\nu} \equiv \rho(x) c^2 \frac{Du^\nu}{Ds} \ , \tag{42}$$

$\rho(x) = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{\sqrt{h}} \gamma \delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}^{(\alpha)}(t))$ est la densité de particule et le quadrivecteur accélération est $\frac{Du^\nu}{Ds}$, h est le déterminant de la partie spatiale de $g_{\mu\nu}$ relié au determinant $g = \det(g_\mu \nu)$ par la relation simple $g = g_{00} h$. Nous avons construit le quadrivecteur densité de courant de façon similaire au cas Minkowskien (12) et en s'inspirant de la construction du quadrivecteur densité de charge dans le cadre de la (RG)[1]; on rappelle que $d^4x\sqrt{-g}$ est invariant et que l'élément de volume curviligne est $\sqrt{h} dx_1 dx_2 dx_3$.

Une particule massive subissant le champ de gravitation métrique $g_{\mu\nu}$ peut alors aussi être soumise au champ de gravitation vectoriel. On peut alors écrire le Lagrangien de la particule de façon analogue au Lagrangien (2) en ajoutant le lagrangien libre de la particule sous le champ métrique:

$$\boxed{L = \frac{mc^2}{2} g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - mc^2 G_\mu(x) \frac{D\dot{x}^\mu}{Ds}} , \tag{43}$$

l'action est alors donnée par:

$$S = \int L ds = \int \frac{mc^2}{2} g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu ds - \int mc^2 G_\mu(x) \frac{D\dot{x}^\mu}{Ds} ds \ . \tag{44}$$

On peut montrer facilement que le deuxième terme du membre de droite de l'action précédente est équivalent à l'action suivante (intégration par partie et annulation de l'intégrale de la dérivée totale):

$$\int \frac{mc^2}{2} \varepsilon_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu ds \ , \tag{45}$$

où $\varepsilon_{\mu\nu}$ est donné par (39).

En variant l'action, on obtient les équations du mouvement pour une particules sous un champ de gravitation vectoriel dans un champ métrique qui sont analogues à (5):

$$g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + \Gamma_{\mu\nu\sigma}\dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma = -\left(\varepsilon_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + \Delta_{\mu\nu\sigma}\dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma\right) \ , \tag{46}$$

où la pseudo-connection $\Delta_{\mu\nu\sigma}$ est donnée par:

$$\Delta_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\nu \varepsilon_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \varepsilon_{\mu\nu} - \partial_\mu \varepsilon_{\nu\sigma}) \ , \tag{47}$$

qui est analogue à la forme du symbole de Christoffel (38) et qui est symétrique sur deux indices $\Delta\mu\nu\sigma = \Delta\mu\sigma\nu$. Par contre, ça n'est plus un tenseur et on peut le comprendre en remarquant que la forme covariante de (47), s'obtient en modifiant les dérivées ∂_μ par des dérivées covariantes D_μ (la dérivée covariante d'un tenseur est un tenseur).

C. Tenseur des contraintes du champ (G) et tenseur impulsion-énergie total

1. Tenseur des contraintes du champ (G) et tenseur impulsion-énergie total

Nous avons discuté dans le cas Minkowskien les analogies formelles entre les équations de champ pour le tenseur de déformation $\varepsilon_{\mu\nu}$ et celles pour le tenseur de contrainte et de déformation dans une théorie de déformation d'un milieu continu tridimensionnel. On peut à l'évidence constater les même similitudes ici, d'après les équations (40) et (41), à la différence bien sûr qu'intervient la dérivée covariante puisque nous travaillons dans le cadre général de la relativité. Cette analogie n'est pas anodine et contient dans le cadre de la gravitation relativiste un sens plus profond que pour le cas Minkowskien où nous ne faisions pas intervenir les densités impulsion-énergie de la matière contrairement au cas général où cette dernière est la source du champ gravitationnel. Il y a ainsi un lien étroit entre la conservation de l'impulsion-énergie totale du système (ou du milieu) qui tient compte des contraintes qui s'exercent sur lui.

En vertu de cette analogie, définissons le tenseur des contraintes suivant:

$$\boxed{T_{\mu\nu}^{(G)} = \sigma_{\mu\nu} \equiv \rho_G c^2 \varepsilon_{\mu\nu}(x)} \tag{48}$$

qui a toutes les caractéristiques d'un tenseur impulsion-énergie et part ailleurs, on peut réécrire l'équation (41) de la façon suivante :

$$D_\mu \left(T_{(G)}^{\mu\nu}(x) + T_{(P)}^{\mu\nu}(x) \right) = 0 \ , \tag{49}$$

où $T_{(P)}^{\mu\nu}(x) \equiv \rho(x) u^\mu u^\nu$ est le tenseur impulsion-énergie associé aux particules en mouvement, avec:

$$\begin{aligned} D_\mu T_{(P)}^{\mu\nu}(x) &= D_\mu(\rho(x)u^\mu)u^\nu + \rho(x)u^\mu D_\mu u^\nu \\ &= 0 + \rho(x)\frac{Du^\mu}{Ds} \equiv j^{(2)\mu}(x) \ , \end{aligned}$$

car la densité de courant de masse se conserve $D_\mu(\rho(x)u^\mu) = 0$ et par définition $u^\mu D_\mu u^\nu \equiv Du^\mu/Ds$. On a donc un tenseur total d'énergie-impulsion donné par:

$$T_{\mu\nu}^{(G+P)}(x) = T_{\mu\nu}^{(G)}(x) + T_{\mu\nu}^{(P)}(x) \ , \tag{50}$$

et l'équation de conservation de ce tenseur total qui tient compte des contraintes en plus de l'énergie de la matière donne bien les équations du champ attendues (41). Cette approche encore une fois est tout à fait similaire à l'approche utilisée en théorie de déformation d'un milieu continu où se dérive le bilan des forces qui s'exercent sur le milieu à partir principe de conservation de l'énergie totale.

2. Expression générale du tenseur des contraintes pour des déformations linéaires

La formule (48) n'est pas générale car elle suppose que $\alpha = 1$ et que donc le terme faisant intervenir la trace du tenseur de déformation n'intervient pas dans l'expression du tenseur des contraintes et de même, comme nous le discuterons dans la suite, dans l'équation du champ (41), que nous obtenons à partir de (49), on considère que λ est une constante universelle dont la dérivée corvariante est nulle. Mais cela aussi dans le cas générale ne peut pas être considéré comme vrai à priori. En toute généralité, nous définissons donc le tenseur suivant :

$$\boxed{T^{(G)}_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} \equiv \rho_G c^2 \left(\varepsilon_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}(1-\alpha) g_{\mu\nu} \varepsilon^{\rho}_{\rho}\right)} \tag{51}$$

qui lui aussi a toutes les propriétés d'un tenseur impulsion-énergie.

D. Equation des champs de gravitations

D'après ce que nous venons de voir dans la section précédente, le tenseur impulsion-énergie du système particule massive plus champ de gravité induit par l'accélération covariantes des masses et donnée par (50). Ainsi, d'après les lois de la gravitation Einsteinienne, le champ de gravitation métrique $g_{\mu\nu}(x)$ est solution des équations d'Einstein[1], où le tenseur impuslion-énergie est donné par (50)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{(G+P)}_{\mu\nu} \ , \tag{52}$$

et les équations de champs (41) dérivent directement de la conservation du tenseur impulsion-énergie.

On obtient dans le cas général, une série de quatre groupes d'équations :

$$\boxed{\left\{ \begin{aligned} R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} &= \tfrac{8\pi G}{c^4} \sigma_{\mu\nu} + \tfrac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \\ D_\mu \sigma^{\mu\nu} &= -\tfrac{8\pi G \lambda^2}{c^4} \mathsf{D}_\mu T^{\mu\nu} \\ \sigma_{\mu\nu} &\equiv \rho_G c^2 \left(\varepsilon_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}(1-\alpha) g_{\mu\nu} \varepsilon^{\rho}_{\rho}\right) \\ D_\sigma D^\sigma \varepsilon_{\mu\nu} + D_\mu D_\nu \varepsilon^{\sigma}_{\sigma} &= D_\mu D^\sigma \varepsilon_{\sigma\nu} + D_\nu D^\sigma \varepsilon_{\sigma\nu} \ , \end{aligned} \right.} \ , \tag{53}$$

où le tenseur impulsion-énergie est donnée par[1] :

$$\frac{1}{2} T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \equiv \frac{\partial \Lambda^{(m)} \sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial \Lambda^{(m)} \sqrt{-g}}{\partial(\partial_\sigma g_{\mu\nu})} \right) \ . \tag{54}$$

où $\Lambda^{(m)}$ est la densité Lagrangienne du champ de matière et $\sqrt{-g} \equiv \sqrt{\det(g_{\mu\nu})}$. On a par exemple, le tenseur impulsion-énergie pour une distribution de particule massives, mais on peut considérer aussi le gaz parfait de particules massives qui est utile en cosmologie, ou encore le champ électromagnétique. On peut trouver les expressions des tenseurs impulsion-énergie dans la référence[1].

E. Hypothèses sur l'expression de λ dans le vide

On voudrait bien sûr connaître la valeur de λ pour calculer les effets de la déformation. L'idée serait de contraindre la valeur de λ pour certain système en calculant des corrections à des effets gravitationnels attendus par la théorie d'Einstein. Mais, tout ceci n'est pour l'instant qu'un projet futur faisant l'objet d'au moins un article à lui tout seul. Nous allons nous contenter ici de quelques hypothèses pour guider la reflexion.

Si on considère que λ est une constante universelle et que $\alpha = 1$, alors nous avons

$$\frac{8\pi G}{c^4}\sigma_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\lambda^2} , \tag{55}$$

et ainsi on retrouve l'équation de champ (41). On serait tenté de penser que la constante λ est reliée à la constante cosmologique Λ, étant donné la similitude que le lecteur aura sûrement déjà remarquée entre le terme $\varepsilon_{\mu\nu}/\lambda^2$ et $\Lambda g_{\mu\nu}$. On peut donc en premier lieu supposer que λ est égale à la longueur de Hubble actuelle, soit de l'ordre de 10^{26}m.[14],[6],[7],[8] On trouverait ainsi une valeur de κ qui serait de l'ordre de 10^{52}m fois la valeur de la constante d'Einstein, et donc κ serait de l'ordre de 10^9Joule/m^3. Reste à voir si cette valeur est en accord avec les observations que nous pourrions faire en tenant compte des effets prédits par la théorie (G). Notons que le fait que cette constante soit la bonne serait très intéressant pour les expériences actuelles en microgravité visant à tester l'évolutions des contantes physiques au cours du temps ainsi que d'apporter des tests plus précis aux théories de gravitation, notamment une expérience spatiale future PHARAO/ACES[15] dont les horloges atomiques amèneraient à une précision sur les mesures de fréquences de l'ordre de 10^{-16}. On pourrait espérer ainsi observer des effets faisant intervenir la constante cosmologique.

Néanmoins, nous devons aussi nous poser la question de l'universalité de λ, i.e. est-elle constante au cours du temps ou est-elle constante sur un intervalle de temps court par rapport à un temps charactéristique plus long ? On pourrait aussi la faire dépendre de la courbure scalaire R (par exemple $\lambda = \sqrt{2/R}$), ce qui la ferait varier en fonction du système gravitationnel. Mais dans ce cas, le second groupe (53) donne une expression différente de (41) car la dérivée covariante de R n'est pas nulle, on trouverait donc :

$$D_\mu \sigma^{\mu\nu} = (D_\nu R^\nu_\mu)\varepsilon^{\mu\nu} + \frac{R}{2}(D_\mu \varepsilon^{\mu\nu}) = -\frac{8\pi G}{c^4}\mathsf{D}_\mu T^{\mu\nu} \tag{56}$$

F. Remarque épistémologique et retour sur le principe d'induction

Une critique épistémologique forte faite par Einstein[19],[20] porte sur le fait que la théorie Newtonienne considère l'espace comme quelque chose de réel alors que selon lui il s'agit en fait d'un artefact sans réalité physique ce qui l'amènera à privilégier le principe de relativité qui ne distingue aucun mouvement les uns des autres et généralisera la notion d'inertie pour l'adapter aux référentiel non inertiels. Il part donc du constat suivant: si deux référentiels sont munis d'un mouvement relatif uniformément accéléré, rien ne peut privilégier l'un ou l'autre des référentiel. A partir de là, il utilise le principe d'équivalence pour dire que ce système est localement équivalent à un champ de gravitation et généralise le principe de relativité. Qu'en est-il de cette remarque si les lois de la gravité n'existent pas ? Les deux référentiels accélérés l'un par rapport à l'autres violeraient-ils cette symétrie ? Autrement dit, il y a-t-il un référentiel inertiel plus légitime au sens où l'un des deux est "vraiment" accéléré ? En philosophie Einsteinienne, nous pouvons dire que non, mais du point de vue de la théorie (G) développée ci-dessus, il est naturelle de considérer l'inverse car si les effets du champ de gravité peuvent être annulé localement dans un référentiel accéléré ce qui rend les deux référentiels autant inertiels l'un que l'autre, cela n'est pas le cas pour des mouvements accélérés par un champ qui n'est pas gravitationnel. Ainsi, nous voyons que du point de vue de la théorie (G), l'espace et le temps ne sont plus un simple artéfact sans aucune signification physique, car en rajoutant le couplage λ (ou κ), nous avons donné une consistance physique à cet espace, mais toutefois sans contradiction avec le théorie de la relativité car les équations de déformations respectent les lois d'invariances relativistes.

Il n'y a donc aucune contradiction formelle à considérer l'espace-temps comme un milieu privilégié qui peut se déformer sous contraintes. Cette idée peut rentrer en contradiction avec l'expérience bien entendu mais en aucun cas avec la théorie. La pensée d'Einstein, à l'époque convaincu de ce que j'ai relaté au-dessus, était plus une conviction philosophique qu'une preuve scientifique, et l'analogie décrite ci-dessus prouve le contraire. D'ailleurs, il est bon de remarque qu'Einstein, lui-même, soulèvera cette contradiction en changeant radicalement de position à partir de 1918 et y reviendra plusieurs fois ensuite[16],[17],[18].

Albert Einstein a proposé une autre vision de l'ether en déclarant que la relativité générale ne pouvait être considérer sans la présence d'un milieu matériel qui contrairement aux idées pré-relativiste se verrait ni comme un milieu fixe dans un espace-temps absolu ni comme un milieu en mouvement; il est intéressant de citer un passage de son texte de 1920, traduit en Français, et dont les références du texte original sont données dans[17]:

"*Le principe de relativité restreinte nous interdit de considérer l'éther comme constitué de particules dont on peut suivre le mouvement dans le temps; mais l'hypothèse de l'éther comme telle ne contredit pas la théorie de la relativité restreinte. Il faut seulement se garder d'attribuer à l'éther un état de mouvement.[...] Nier l'éther, signifie en dernier lieu qu'il faut supposer que l'espace vide ne possède aucune propriété physique. Or, les faits fondamentaux de la mécanique ne se trouvent pas d'accord avec cette conception. L'état mécanique d'un système de corps qui flottent librement dans l'espace vide dépend, non seulement de ses positions relatives (distance) et de ses vitesses relatives, mais encore de son état de rotation qui, du point de vue physique, ne peut pas être conçu comme un caractère appartenant au système en soi. Pour concevoir la rotation du système comme quelque chose de réel, ne fût-ce qu'au point de vue formel, Newton a objectivé l'espace. Par le fait qu'il place son espace absolu parmis les objets réels, la rotation par rapport à l'espace absolu devient aussi une réalité. Newton aurait pu aussi appeler son espace absolu éther; ce qui importe, c'est de supposer comme réel, à côté des objets accessibles à l'observation, un objet qui est inaccessible, afin de pouvoir regarder l'accélération ou la rotation comme quelque chose de réel.*"

Suivant cette idée, nous avons en quelque sorte formalisé ce concept d'ether via le tenseur des contraintes $\sigma_{\mu\nu} = \rho_G \varepsilon_{\mu\nu}$, qui peut être vu comme une contrainte appliqué cet éther constituant le milieu matériel gravitationnel. Alors la notion d'accélération prend un sens et possède une réalité puisqu'elle existe au sein de ce milieu matériel comme origine d'une déformation de celui-ci qui se propage au cours du temps (rappelons comme nous l'avons discuté dans la section sur le principe d'induction qu'il y a deux types d'accélération, nous parlons ici bien entendu de l'accélération "non naturelle"). Ainsi, si la théorie est vraie, on devrait être capable d'observer des modifications effectives de la métrique (où la métrique effective prend la forme $g_{\mu\nu}^{(eff)} = g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}$ dans les équations (46)), qui pourrait apporter des corrections sur le décalage des horloges ou d'autres effets reliés tel que le décalage vers le rouge.

---

[*] Also at home.

[†] mbeau@stp.dias.ie

[1] L.Landau , Physique Théorique Tome 2 (Théorie des Champs).

[2] M. Ostrogradsky, Mem. Acad. St. Petersburg **6** (4),385 (1850).

[3] M. Borneas, On a generalization of the Lagrange Function, American Journal of Physics, **27** (4), pp. 265-267 (1959).

[4] M. Borneas, Principle of the Action with Higher Derivatives, Phys.Rev **186** (5), 1299, (1969).

[5] D. Anderson, Equivalent Lagrangians in generalized mechanics, J. Math. Phys. **14**, 934 (1973).

[6] S. M. Carroll, Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity, Addison-Wesley (2004).

[7] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation, W. H. Freeman and Compagny (1973).

[8] B. F. Schutz , Gravity from the ground up, Cambridge University Press (2003).

[9] J. Salençon, Mécanique des milieux continus - Tome 1 : Concepts généraux, les Editions de l'Ecole Polytechnique (2005).

[10] D. R. Brill and J. M. Cohen, Rotating Masses and Their Effect on Inertial Frames, Phys. Rev. **143**, 1011-1015 (1966).

[11] H. Lumbroso, Relativité, Problèmes résolus, McGraw-Hill (1984).

[12] H. Lumbroso, Magétostatique, Problèmes résolus, McGraw-Hill (1995).

[13] W. F. Everitt et al. Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity, Physical Review Letters 106 (22), 221101 (2011).

[14] W-M Yao et al, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **33**, 1, (2006).

[15] L. Cacciapuoti, Ch. Salomon, Scpace clocks and fundamental tests: The ACES experiment, Eur. Phys. J. Special Topics **172**, 57-68 (2009).

[16] A. Einstein, Dialogue sur les objections opposées à la théorie de la relativité, Die Naturwissenschafter **6**, 697-702, (1918), Traduit dans les Oeuvres choisies 3 (dernière référence).

[17] A. Einstein, L'éther et la théorie de la relativité, conférence à l'Université de Leyde (1920),

traduction de M. Solovine dans Traduit dans les Oeuvres choisies 3 (dernière référence). Ether and the Theory of Relativity, in Collected Paper of Albert Einstein, Princeton University Press.

[18] A. Einstein, Über den Äther, Verhandlung der Schweizerischen Natuforschenden Gesellschaft **105**:2, 85-93 (1924).

[19] Oeuvres choisies 2 Relativité I, par F. Balibar, O. Darrignol, B. Jech, Edition du Seuil, Paris (1989);

[20] Oeuvres choisies 3 Relativité II, par F. Balibar, O. Darrignol, B. Jech, Edition du Seuil, Paris (1989).